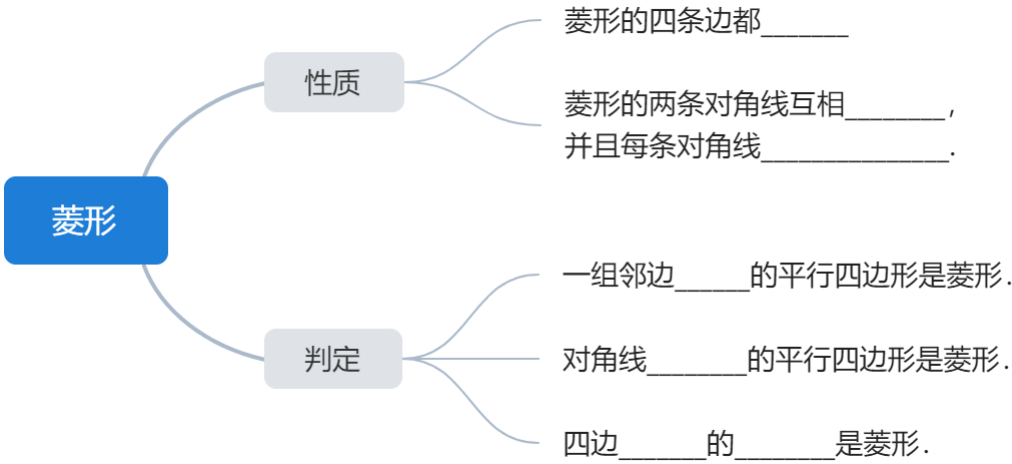


第2讲 菱形与正方形

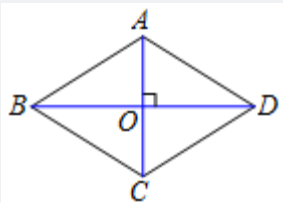
一、菱形



教法备注

1.性质

菱形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质，还具有自己独特的性质。

图形	性质		符号表示
 菱形$ABCD$	边	菱形的四条边都相等 菱形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB // CD, AD // BC$
	角	菱形的对角相等	$\angle DAB = \angle BCD,$ $\angle ABC = \angle ADC$
	对角线	菱形的两条对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角	$AC \perp BD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

【注】：加粗为菱形特有的性质

①菱形的对角线分菱形为4个全等的直角三角形。

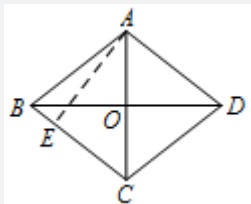
②全等三角形有： $\triangle ABC \cong \triangle ADC, \triangle ABD \cong \triangle CBD, \triangle AOB \cong \triangle COD \cong \triangle AOD \cong \triangle COB$ 。

③菱形是中心对称图形，也是轴对称图形．

所以，有关菱形问题可转化为直角三角形或等腰三角形的问题来解决（转化思想）

由于菱形对角线互相垂直，所以有菱形的面积等于对角线乘积的一半．

$$S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = BC \cdot AE, \text{ 其中 } AE \text{ 为 } BC \text{ 边上的高.}$$



【拓展】对角线互相垂直的四边形的面积等于对角线乘积的一半

2.判定：

- ①一组邻边相等的平行四边形是菱形．
- ②对角线互相垂直的平行四边形是菱形．
- ③四边相等的四边形是菱形．

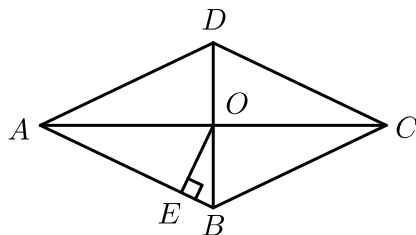
【总结】

- ①证明一个四边形是菱形，一般情况下，先证明它是一个平行四边形，然后证明“一组邻边相等”或“对角线互相垂直”即可．
- ②若直接证明一个四边形是菱形，只要证明“四条边相等”即可．

|| 角度问题

👤 典题精练

1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $OE \perp AB$ ，垂足为 E ，若 $\angle ADC = 130^\circ$ ，则 $\angle AOE$ 的大小为（ ）．



- A. 75° B. 65° C. 55° D. 50°

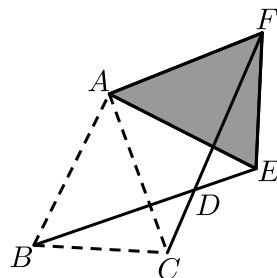
【答案】 B

【解析】 $\because \angle ADC = 130^\circ$,
 $\therefore \angle BAD = 50^\circ$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle EAO &= 25^\circ, \\ \therefore OE &\perp AB, \\ \therefore \angle AOE &= 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】菱形的性质

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转得 $\triangle AEF$ ，其中， E, F 是点 B, C 旋转后的对应点， BE, CF 相交于点 D ．若四边形 $ABDF$ 为菱形，则 $\angle CAE$ 的大小是（ ）．



- A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°

【答案】A

【解析】 $\because ABDF$ 是菱形，
 $\therefore AB \parallel CF, AB = AF$ ，
 $\therefore \angle BAC = \angle ACF = 45^\circ, AF = AC$ ，
 $\therefore \angle ACF = \angle AFC = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAF = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转得 $\triangle AEF$ ，
 $\therefore \angle EAF = \angle BAC = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle EAC = \angle CAF - \angle EAF = 45^\circ$ ，
 故选：A．

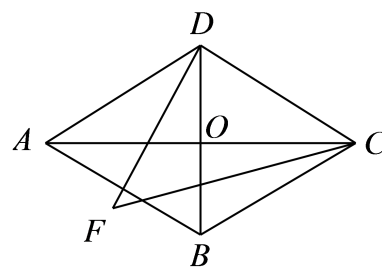
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【重点强调】

2018年天津北辰区初三二模第9题3分

过关斩将

3. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $DF \perp AB$ 与点 E ，且 $DF = DC$ ，连接 FC ，则 $\angle ACF$ 的度数为（ ）．



A. 10°

B. 15°

C. 20°

D. 25°

【答案】 B

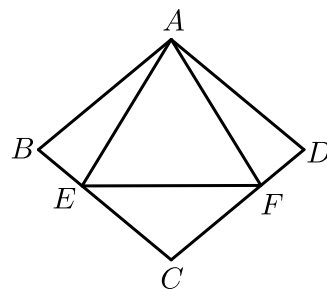
【解析】 $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, $DF = DC$,
 $\therefore \angle BCD = 60^\circ$, $AB \parallel CD$, $\angle DFC = \angle DCF$,
 $\therefore DF \perp AB$ 与点 E
 $\therefore \angle FDC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DFC = \angle DCF = 45^\circ$
 $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DCA = \angle ACB$,
 $\therefore \angle DCA = \angle ACB = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ACF$ 的度数为 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$,
 故选: B.

【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2015年天津大港区初三二模第11题3分

4. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\triangle AEF$ 是等边三角形, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上, 且 $AB = AE$, 则 $\angle B$ 等于 _____ $^\circ$.



【答案】 80

【解析】 $\because AB = AE$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$ (等边对等角) ,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形 ,
 $\therefore \angle ABC = \angle ADC$ (菱形的对角相等) ,
 $AD \parallel BC \quad AB \parallel CD$ (菱形的对边平行) ,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DCB + \angle ADC = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补) ,
 $\therefore \angle AEC + \angle ABC = 180^\circ$,
 $\angle ABC = \angle ADC$,
 $\angle ABE = \angle AEB$,
 $\angle DCB + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle AEC = \angle BCD$,
 同理 $\angle BCD = \angle AFC$,
 $\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle EAF = 60^\circ$ (等边三角形的三个角相等, 并且每个角都等于 60°) ,
 $\therefore \angle EAF + \angle AEC + \angle ECF + \angle AFC = 360^\circ \quad \angle EAF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle AEC + \angle ECF + \angle AFC = 300^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = \angle AFC \quad \angle AEC = \angle BCD$,
 $\therefore 3\angle ECF = 300^\circ$,
 $\therefore \angle ECF = 100^\circ$,
 $\therefore AB \parallel CD \quad \angle ECF = 100^\circ$,
 $\therefore \angle B = 80^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补) .

【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】等边三角形的性质

【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

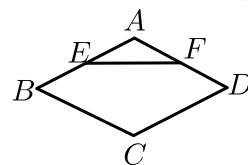
【重点强调】

2015年天津津南区初三二模第17题3分

|| 线段问题

🧠 典题精练

5. 如图, 菱形 $ABCD$ 的周长为16, $\angle C = 120^\circ$, E, F 分别为 AB, AD 的中点, 则 EF 的长为 () .



A. $2\sqrt{2}$

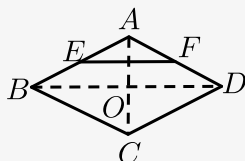
B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. 8

【答案】 B

【解析】 连接 BD ， AC 交于点 O ：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，周长为 16，

$\therefore AC \perp BD$ ， $AB = 4$ ，

又 $\because \angle BAD = \angle BCD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAO = 60^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，

$$\sin 60^\circ = \frac{BO}{AB}，$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BO}{4}，$$

$$BO = 2\sqrt{3}，$$

$$\therefore BD = 2BO = 4\sqrt{3}，$$

又 $\because E, F$ 为 AB, AD 中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{3}。$$

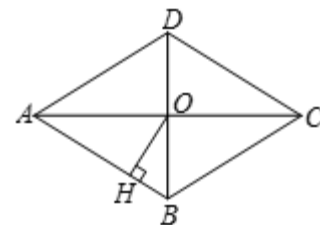
故选：B。

【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2020年天津和平区初三一模第9题3分

6. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $AC = 8$ ， $BD = 6$ ，过点 O 作 $OH \perp AB$ ，垂足为 H ，则点 O 到边 AB 的距离 OH 等于（ ）。



- A. 2 B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{12}{5}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 8$, $BD = 6$,

$$\therefore BO = 3, AO = 4, AO \perp BO,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5.$$

$$\because OH \perp AB,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2}AB \cdot OH,$$

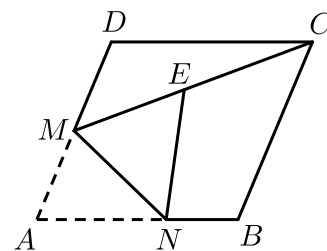
$$\therefore OH = \frac{12}{5}.$$

【标注】 【知识点】 菱形的性质

【重点强调】

2016年天津初三一模五区县第10题3分

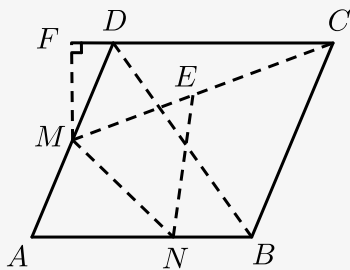
7. 如图, 在边长为4的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, M 是 AD 边的中点, 连接 MC , 将菱形 $ABCD$ 翻折, 使点 A 落在线段 CM 上的点 E 处, 折痕交 AB 于 N , 则线段 EC 的长为 () .



- A. $2\sqrt{7} - 2$ B. 4 C. 5 D. $2\sqrt{7} + 2$

【答案】 A

【解析】 如图所示: 过点 M 作 $MF \perp DC$ 于点 F ,



$\therefore$ 在边长为4的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, M 为 AD 中点,
 $\therefore 2MD = AD = CD = 4$, $\angle FDM = 60^\circ$,
 $\therefore \angle FMD = 30^\circ$,
 $\therefore FD = \frac{1}{2}MD = 1$,
 $\therefore FM = DM \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}$,
 $\therefore MC = \sqrt{FM^2 + CF^2} = 2\sqrt{7}$,
 $\therefore EC = MC - ME = 2\sqrt{7} - 2$.
 故选A.

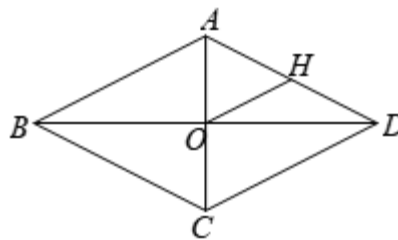
【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2020年天津红桥区初三三模第11题3分

过关斩将

8. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , H 为 AD 边中点, 菱形 $ABCD$ 的周长为28, 则 OH 的长等于().



- A. 3.5 B. 6 C. 7 D. 14

【答案】A

【解析】 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$$OA = OC,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{4}C = \frac{1}{4} \times 28 = 7,$$

$\therefore H$ 为 AD 边中点，
 $\therefore AH = DH$ ，
 $\therefore OH$ 为 $\triangle ACD$ 的中位线．
 $\therefore OH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ ．

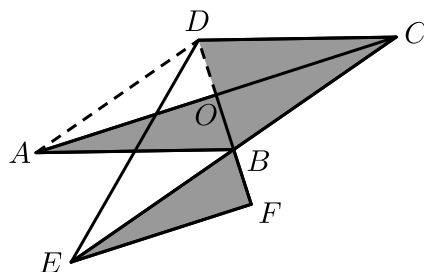
【标注】【知识点】菱形的性质

【知识点】三角形的中位线

【重点强调】

2015年天津东丽区初三二模第8题3分

9. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AC = 16$ ， $BD = 4$ ．平移 $\triangle AOD$ ，使点 D 与点 B 重合，点 A 的对应点 E 落在 CB 的延长线上，点 O 的对应点 F 落在 DB 的延长线上，则 DE 的长是（ ）．



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore OA = OC = 8, OB = OD = 2,$$

由平移可知： $BF = OD = 2$ ， $OA = EF = 8$ ， $\angle F = \angle AOD = 90^\circ$ ，

$$\therefore DF = 4 + 2 = 6,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中：

$$DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

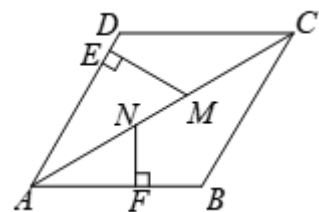
故选C．

【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2020年天津北辰区初三二模第10题3分

10. 如图，菱形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 在线段 AC 上， $ME \perp AD$ ， $NF \perp AB$ ，若 $ME = 3$ ， $NF = NM = 2$ ，则 AN 的值为（ ）.



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】B

【解析】设 $AN = x$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle FAN = \angle EAM$ ，

$\therefore \triangle FAN \sim \triangle EAM$ ，

$$\therefore \frac{AN}{AM} = \frac{NF}{ME}，$$

$$\therefore \frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}，$$

$$3x = 2x + 4，$$

$$x = 4。$$

【标注】【知识点】菱形的性质

【知识点】相似三角形的性质

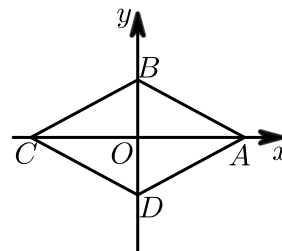
【重点强调】

2015年天津红桥区初三二模第11题3分

|| 与坐标系综合

💡 典题精练

11. 如图，四边形 $ABCD$ 为菱形， A ， B 两点的坐标分别是 $(2, 0)$ ， $(0, 1)$ ，点 C ， D 在坐标轴上，则菱形 $ABCD$ 的面积等于（ ）.



A. 4

B. 6

C. $4\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{5}$

【答案】 A

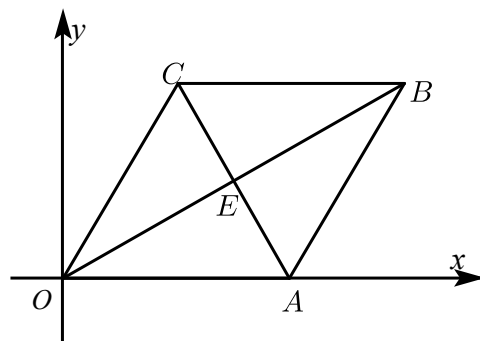
【解析】 $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$
 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 2$
 $= 4$.
 故选A .

【标注】 【知识点】 菱形的周长与面积

【重点强调】

2020年天津河西区初三二模第9题3分

12. 如图，在平面直角坐标系中，四边形OABC为菱形，O为原点，点A的坐标为(4, 0)，
 $\angle AOC = 60^\circ$ ，则对角线的交点E的坐标为 () .



A. $(2, \sqrt{3})$

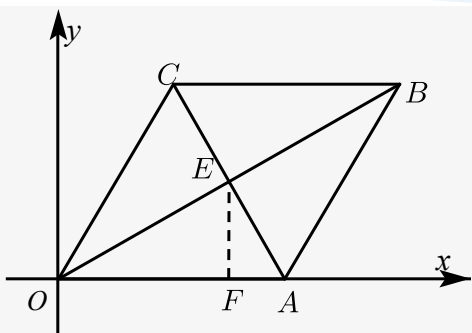
B. $(\sqrt{3}, 2)$

C. $(\sqrt{3}, 3)$

D. $(3, \sqrt{3})$

【答案】 D

【解析】



过点 E 作 $EF \perp x$ 轴于点 F ,

$\because$ 四边形 $OABC$ 为菱形, $\angle AOC = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOE = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ$, $\angle FAE = 60^\circ$,

$\therefore A(4, 0)$,

$\therefore OA = 4$,

$\therefore AE = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \times 4 = 2$,

$\therefore AF = \frac{1}{2} AE = 1$, $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore OF = AO - AF = 4 - 1 = 3$,

$\therefore E(3, \sqrt{3})$.

故选D.

【标注】【能力】运算能力

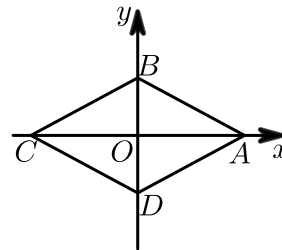
【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2020年天津西青区初三二模第8题3分

💡 经典再现

13. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, A, B 两点的坐标分别是 $(2, 0)$, $(0, 1)$, 点 C, D 在坐标轴上, 则菱形 $ABCD$ 的周长等于().



A. $\sqrt{5}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{5}$

D. 20

【答案】C

【解析】由勾股定理可得 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{5}$,
 由菱形性质可得 $AB = AD = CD = CB = \sqrt{5}$,
 所以周长等于 $AB + AD + CD + CB = 4\sqrt{5}$.
 故选C .

【标注】【知识点】菱形的周长与面积

【重点强调】

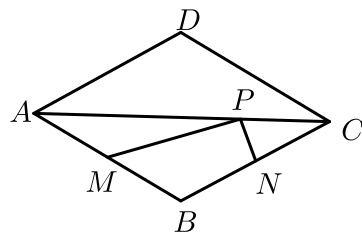
2019年中考第8题（3分）

菱形性质（四边相等、对角线互相平分），勾股定理求线段长

|| 菱形与将军饮马

🧠 典题精练

14. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为1，点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 边上的中点，点 P 是对角线 AC 上的一个动点，则 $MP + PN$ 的最小值是（ ）.



A. $\frac{1}{2}$

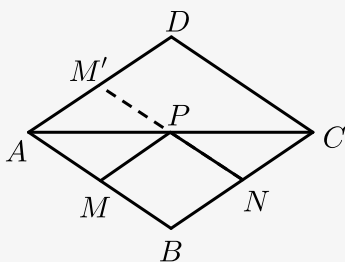
B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

【答案】B

【解析】 $\because M, N$ 分别是 AB, BC 边上的中点，
 $\therefore$ 点 M 关于 AC 的对称点是 AD 的中点，记为 M' ，
 连接 $M'N$ 与 AC 交于点 P ，此时 $PM + PN$ 最小，
 又 $\because ABCD$ 是菱形，
 $PM + PN = PM' + PN = AB = 1$ ，
 $\therefore PM + PN$ 最小值为1 .
 故选B .



【标注】【能力】推理论证能力

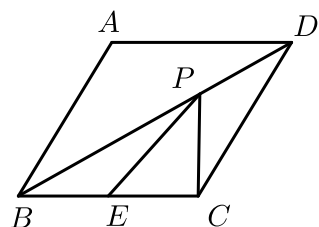
【知识点】轴对称的定义

【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2019年天津西青区初三一模第11题3分

15. 如图，已知菱形 $ABCD$ ， $AB = 4$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， E 为 BC 的中点， P 为对角线 BD 上一点，则 $PE + PC$ 的最小值等于（ ）



A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{5}$

D. 8

【答案】B

【解析】由菱形对角线相互垂直平分可得 A 、 C 关于 BD 对称，则 $PA = PC$ ，

$$\therefore PE + PC = PE + PA = AE.$$

即 AE 为 $PE + PC$ 最小值，

$$\because \angle BAD = 120^\circ, AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because AD = AB,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}AB = 2.$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3},$$

故答案为B.

【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】菱形的性质

【知识点】等边三角形的性质

【知识点】勾股定理

【知识点】直接用勾股求边长

【思想】数形结合思想

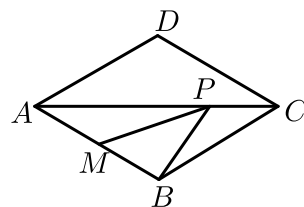
【思想】转化与化归思想

【重点强调】

2019年天津滨海新区初三一模第11题3分

过关斩将

16. 如图所示，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ， M 是 AB 的中点， P 是对角线 AC 上的一个动点，若 $PM + PB$ 的最小值是3，则 AB 的长为（ ）。



A. 3

B. $\sqrt{3}$

C. 6

D. $2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】连接 BD 交 AC 于 O ，

如图： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore B$ 与 D 关于直线 AC 对称，

$\therefore$ 连接 DM 交 AC 于 P ，

则点 P 即为所求，

$$BP + PM = PD + PM = DM$$

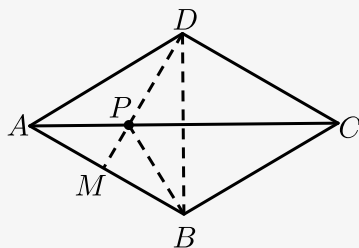
，

即 DM 就是 $PM + PB$ 的最小值（根据的是两点之间线段最短），

$\because \angle DAB = 60^\circ$ ，

$\therefore AD = AB = BD$ ，

$\because M$ 是 AB 的中点，

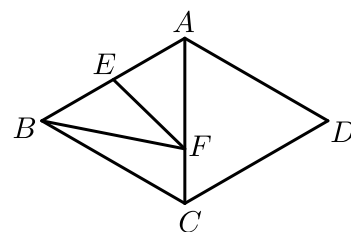


$$\begin{aligned} \therefore DM &\perp AB, \\ \therefore PM + PB &= 3, \\ \therefore DM &= 3, \\ \therefore DM &= (\sqrt{2^2 - 1})BM, \\ \therefore AB = AD &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

故选：D．

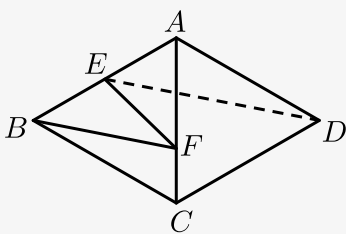
【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

17. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为4， $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 AC 上的一动点，则 $EF + BF$ 的最小值是 _____ ．



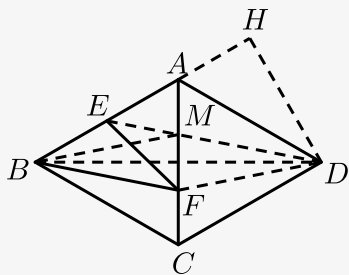
【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】 方法一： $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 互相垂直平分，
 $\therefore$ 点 B 、 D 关于 AC 对称，
 连接 ED ，则 ED 就是所求的 $EF + BF$ 的最小值的线段，



$\because E$ 是 AB 的中点， $\angle BAD = 120^\circ$ ，
 在 $\triangle ADE$ 中， $AD = 4$ ， $AE = 2$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ，
 解得： $DE = 2\sqrt{7}$ ．
 故 $EF + BF$ 的最小值是 $2\sqrt{7}$ ．

方法二：连接 DB ， DE ，设 DE 交 AC 于 M ，连接 MB ， DF ，延长 BA ，
 $DH \perp BA$ 于 H ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
 $\therefore AC, BD$ 互相垂直平分，
 $\therefore$ 点 B 关于 AC 的对称点为 D ，
 $\therefore FD = FB$ ，
 $\therefore FE + FB = FE + FD \geq DE$ ，
 只有当点 F 运动到点 M 时，取等号（两点之间线段最短），
 $\triangle ABD$ 中， $AD = AB$ ， $\angle DAB = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle HAD = 60^\circ$ ，
 $\therefore DH \perp AB$ ，
 $\therefore AH = \frac{1}{2}AD$ ， $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}AD$ ，
 $\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为 AB 的中点，
 $\therefore AE = 2$ ， $AH = 2$ ，
 $\therefore EH = 4$ ， $DH = 2\sqrt{3}$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle EHD$ 中， $DE = \sqrt{EH^2 + DH^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$ ，
 $\therefore EF + BF$ 的最小值为 $2\sqrt{7}$ 。
 故答案为： $2\sqrt{7}$ 。

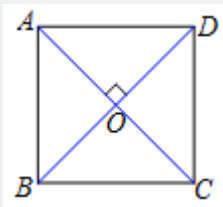
【标注】【知识点】线段和的最小值

二、正方形

教法备注

1. 性质

正方形是特殊的平行四边形，既是矩形，又是菱形，因此它具有前三者的所有性质。

图形	性质		符号表示
正方形 $ABCD$ 	边	正方形的四条边都相等 正方形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	正方形的四个角都直角	$\angle ABC = \angle BCD =$ $\angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	正方形的对角线相等且 互相垂直平分 正方形的每一条对角线 平分一组对角	$AC = BD, AC \perp BD$ $OA = OC = OB = OD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

【注】：

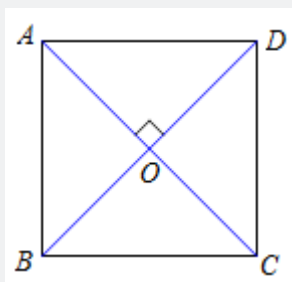
①是轴对称图形、4条对称轴、中心对称图形

② 正方形的周长：边长的4倍．如图，周长 $C = 4AB$ ．

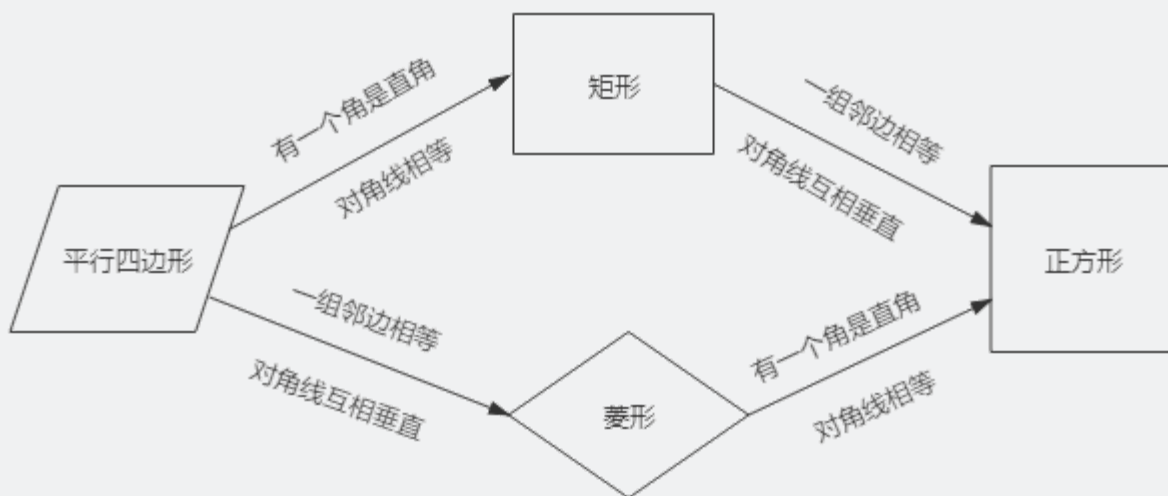
③正方形的面积：

边长的平方．如图，面积 $S_{\text{正方形}ABCD} = AB^2$ ．

对角线平方的一半．如图，面积 $S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{1}{2}AC^2$ ．



2.判定



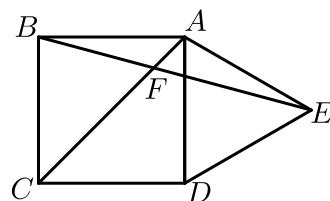
【方法点拨】：

正方形的判定方法一般是在其他特殊的四边形的基础上判定的，而特殊的四边形的判定方法又各异，所以在判定正方形时，一定要注意题目中的条件，选择适当的判定方法

|| 角度问题

🔗 典题精练

18. 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧，作等边三角形 ADE ， AC 、 BE 相交于点 F ，则 $\angle BFC$ 为（ ）。



A. 75°

B. 60°

C. 55°

D. 45°

【答案】B

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = AD,$$

又 $\because \triangle ADE$ 是等边三角形，

$$\therefore AE = AD = DE, \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB, \angle BAE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = (180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ,$$

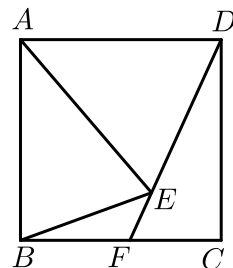
$$\text{又} \because \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ ,$$

故选B .

【标注】【知识点】正方形的性质

19. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AE = AB$ ，直线 DE 交 BC 于点 F ，则 $\angle BEF = (\quad)$.



A. 45°

B. 30°

C. 60°

D. 55°

【答案】A

【解析】方法一：设 $\angle BAE = x^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，

$\because AE = AB$ ，

$\therefore AB = AE = AD$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle AEB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAE) = 90^\circ - \frac{1}{2}x^\circ$ ， $\angle DAE = 90^\circ - x^\circ$ ，

$\angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAE)$

$= \frac{1}{2}[180^\circ - (90^\circ - x^\circ)]$

$= 45^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$ ，

$\therefore \angle BEF = 180^\circ - \angle AEB - \angle AED$

$= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}x^\circ) - (45^\circ + \frac{1}{2}x^\circ)$

$= 45^\circ$.

故答案为A .

方法二： $\because AB = AE = AD$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$ ， $\angle AED = \angle ADE$ ，

$\because \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE + \angle AEB + \angle AED + \angle ADE = 270^\circ$ ，

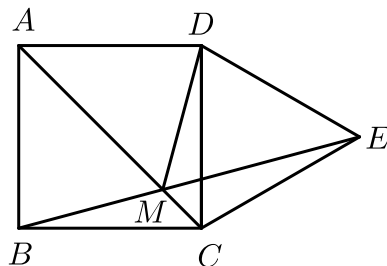
$\therefore \angle AEB + \angle AED = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle BEF = 45^\circ$.

【标注】【知识点】正方形的性质

过关斩将

20. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，以 CD 为边作等边三角形 CDE ， BE 与 AC 相交于点 M ，连接 DM ，则 $\angle AMD$ 的度数是（ ）。



A. 75°

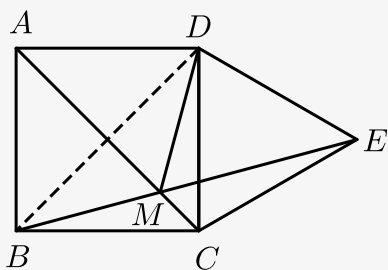
B. 60°

C. 54°

D. 67.5°

【答案】B

【解析】如图，连接 BD ，



$\because \triangle CDE$ 是等边三角形，四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore \angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ ， $BC = EC$ ，
 $\therefore \angle EBC = \angle BEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCE) = 15^\circ$ ，
 $\therefore \angle BCM = \frac{1}{2}\angle BCD = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle BMC = 180^\circ - (\angle BCM + \angle EBC) = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle AMB = 180^\circ - \angle BMC = 60^\circ$ ，
 $\because AC$ 是线段 BD 的垂直平分线， M 在 AC 上，
 $\therefore \angle AMD = \angle AMB = 60^\circ$ 。

故选B。

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】三角形内角和的应用

【知识点】三角形的外角定义及性质

【知识点】正方形的性质

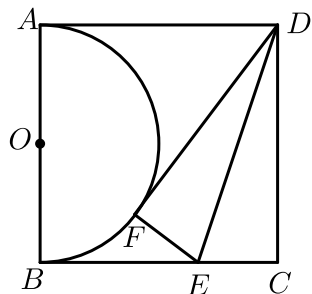
【重点强调】

2017年天津南开区初三二模第11题3分

|| 线段问题

🔗 典题精练

21. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，点 E 是 BC 边上的一点，以 AB 为直径在正方形内作半圆 O ，将 $\triangle DCE$ 沿着 DE 翻折，点 C 恰好落在半圆 O 上的点 F 处，则 CE 的长为（ ）.



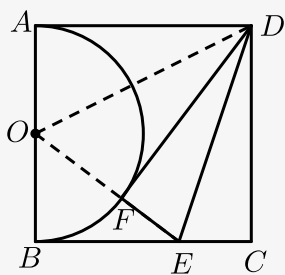
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】如图，连接 OD ， OF ，

由 $AO = FO = 1$ ， $AD = FD$ ， $DO = DO$ ，可得 $\triangle AOD \cong \triangle FOD$ ，

$\therefore \angle DAO = \angle DFO = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle DFE = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore O, F, E$ 在同一直线上，

设 $CE = EF = x$ ，则 $BE = 2 - x$ ， $OE = 1 + x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中， $BO^2 + BE^2 = OE^2$ ，

$$\therefore 1^2 + (2 - x)^2 = (1 + x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3},$$

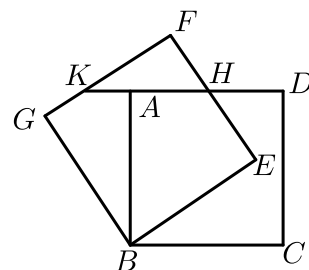
故选D.

【标注】【知识点】圆与勾股

【重点强调】

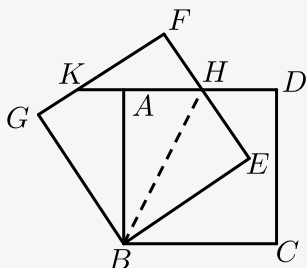
2020年天津和平区初三二模第11题3分

22. 如图，正方形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转 30° 后得到正方形 $BEFG$ ， EF 与 AD 相交于点 H ，延长 DA 交 GF 于点 K ．若正方形 $ABCD$ 边长为 $\sqrt{3}$ ，则 $AK = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 $2\sqrt{3} - 3$

【解析】连接 BH ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 是正方形，

$\therefore \angle BAH = \angle ABC = \angle BEH = \angle F = 90^\circ$ ，

由旋转的性质得： $AB = EB$ ， $\angle CBE = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = 60^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 和 $\text{Rt}\triangle EBH$ 中，

$\therefore BH = BH$ ， $AB = EB$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABH \cong \text{Rt}\triangle EBH$ (HL)，

$\therefore \angle ABH = \angle EBH = \frac{1}{2} \angle ABE = 30^\circ$ ， $AH = EH$ ，

$\therefore AH = AB \cdot \tan \angle ABH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$ ，

$\therefore EH = 1$ ，

$\therefore FH = \sqrt{3} - 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle FKH$ 中, $\angle FKH = 30^\circ$,

$$\therefore KH = 2FH = 2(\sqrt{3} - 1),$$

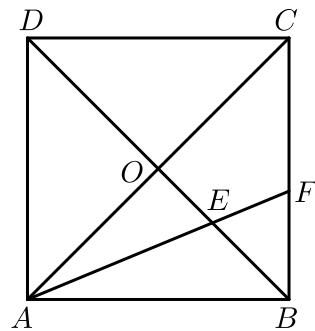
$$\therefore AK = KH - AH = 2(\sqrt{3} - 1) - 1 = 2\sqrt{3} - 3.$$

【标注】【知识点】四边形与旋转问题

【重点强调】

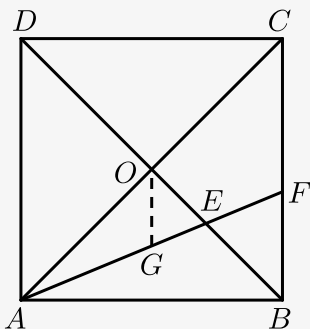
2017年天津和平区初三一模第17题3分

23. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\angle CAB$ 的平分线交 BD 于点 E , 交 BC 于点 F . 若 $OE = 2$, 则 $CF = \underline{\quad\quad}$.



【答案】4

【解析】如图,



取 AF 的中点 G , 连接 OG ,

$\because O$ 、 G 分别为 AC 、 AF 的中点,

$$\therefore OG = \frac{1}{2}CF \text{ 且 } OG \parallel CF,$$

$\because \angle CAB = 45^\circ$, AF 平分 $\angle CAB$,

$$\therefore \angle BAF = \angle OAF = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEO = 90^\circ - \angle OAF = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore OG \parallel CF,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle AOG &= \angle OCB = 45^\circ, \\ \therefore \angle OGE &= \angle OAF + \angle AOG = 22.5^\circ + 45^\circ = 67.5^\circ, \\ \therefore \angle AEO &= \angle OGE, \\ \therefore OG &= OE = 2, \\ \therefore CF &= 2OG = 4.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】中位线定理及其应用

【知识点】角分线性质定理

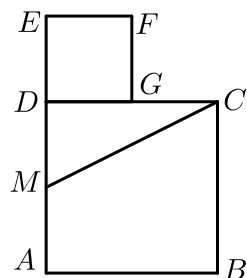
【能力】推理论证能力

【重点强调】

2019年天津武清区初三二模第17题3分

🔥 经典再现

24. 如图，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中， M 为边 AD 的中点，延长 MD 至点 E ，使 $ME = MC$ ，以 DE 为边作正方形 $DEFG$ ，点 G 在边 CD 上，则 DG 的长为（ ）.



A. $\sqrt{3} - 1$

B. $3 - \sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} + 1$

D. $\sqrt{5} - 1$

【答案】D

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， M 为边 DA 的中点，

$$\therefore DM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}DC = 1,$$

$$\therefore CM = \sqrt{DC^2 + DM^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore ME = MC = \sqrt{5}.$$

$$\therefore ED = EM - DM = \sqrt{5} - 1.$$

$\because$ 四边形 $EDGF$ 是正方形，

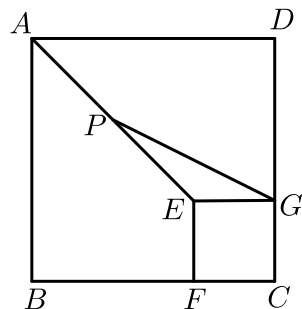
$$\therefore DG = DE = \sqrt{5} - 1.$$

【标注】【知识点】正方形的性质

【重点强调】

2012年天津中考真题第8题

25. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFCG$ 的边长分别为3和1，点 F 、 G 分别在边 BC 、 CD 上， P 为 AE 的中点，连接 PG ，则 PG 的长为 _____ .



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 方法一：作 $PM \perp CD$ 于点 M ，连接 DE 交 PM 于点 N .

在正方形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel PM$.

$\because P$ 是 AE 中点，

$\therefore PN = \frac{1}{2}AD$ ， $DN = EN$.

$\therefore NM = \frac{1}{2}EG$ ， $DM = MG$.

$\therefore$

$$PM = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 1 = 2 ,$$

$$MG = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}(CD - CG) = \frac{1}{2} \times (3 - 1) = 1 .$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PMG$ 中， $PM^2 + MG^2 = PG^2$ ，

$$\therefore PG = \sqrt{PM^2 + MG^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} .$$

方法二：延长 GP 、 DA 相交于点 M .

可证 $\triangle AMP \cong \triangle EGP$ (ASA) .

$\therefore MG = 2PG$ ， $AM = EG = 1$.

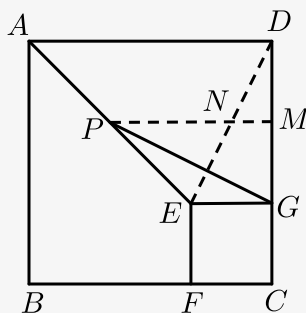
$$DM = AD + AM = 4 .$$

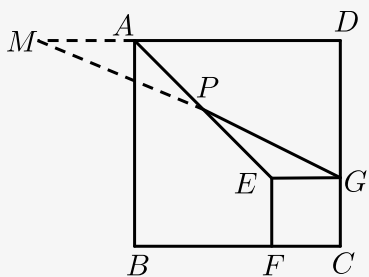
$$DG = DC - GC = 2 .$$

在 $\text{Rt}\triangle DMG$ 中，

$$MG = \sqrt{DM^2 + DG^2} = 2\sqrt{5} .$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}MG = \sqrt{5} .$$





【标注】【知识点】中点类综合计算与证明

【重点强调】

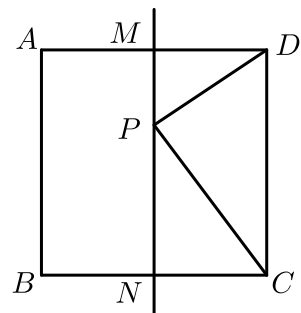
2017年中考第17题（3分）

正方形的性质的综合运用，构造中位线或全等三角形

|| 正方形与将军饮马

💡 典题精练

26. 如图， MN 是正方形 $ABCD$ 的一条对称轴，点 P 是直线 MN 上的一个动点，当 $PC + PD$ 最小时， $\angle PCD = (\quad)$.



A. 75°

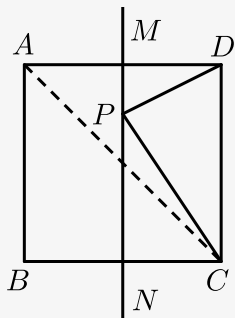
B. 90°

C. 45°

D. 60°

【答案】C

【解析】当 $PC + PD$ 最小时，作出 D 点关于 MN 的对称点，正好是 A 点，连接 AC ， AC 为正方形对角线，根据正方形的性质得出 $\angle PCD = 45^\circ$.



$$\therefore \angle PCD = 45^\circ.$$

故选C.

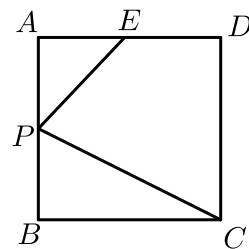
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】正方形的性质

【重点强调】

2019年天津东丽区初三二模第11题3分

27. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 AD 的中点， P 为 AB 上的一个动点，若 $AB = 2$ ，则 $PE + PC$ 的最小值为（ ）.



A. $1 + 2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{5}$

D. $\sqrt{13}$

【答案】D

【解析】作点 C 关于 AB 的对称点 Q ，连接 EQ 交 AB 于 P ，

则此时， $PE + PC$ 的值最小， $PE + PC$ 的最小值 = EQ ，

过 E 作 $EF \perp BC$ 于 F ，

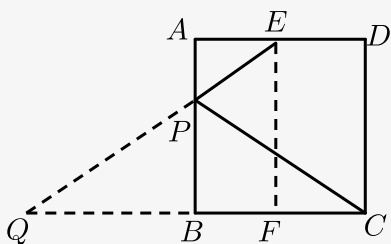
则四边形 $ABFE$ 是矩形，

$$\therefore EF = AB = 2, BF = AE = \frac{1}{2}AD = 1,$$

$$\therefore QF = 3,$$

$$\therefore EQ = \sqrt{EF^2 + FQ^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

故选D.

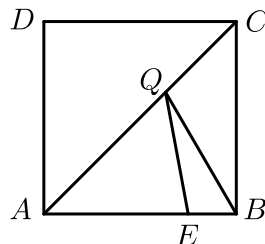


【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

【重点强调】

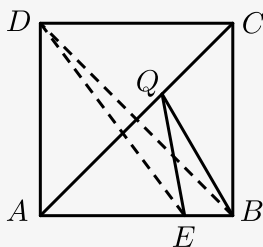
2019年天津红桥区初三一模第11题3分

28. 如图，在边长为4的正方形 $ABCD$ 中， E 是 AB 边上的一点，且 $AE = 3$ ，点 Q 为对角线 AC 上的动点，则 $\triangle BEQ$ 周长的最小值为 _____ .



【答案】 6

【解析】 连接 BD ， DE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore$ 点 B 与点 D 关于直线 AC 对称，
 $\therefore DE$ 的长即为 $BQ + QE$ 的最小值，
 $\therefore DE = BQ + QE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，
 $\therefore \triangle BEQ$ 周长的最小值 $= DE + BE = 5 + 1 = 6$.

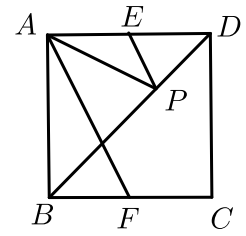
【标注】 【知识点】 正方形的性质

【重点强调】

2018年天津武清区初三一模第17题3分

经典再现

29. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别为 AD ， BC 的中点， P 为对角线 BD 上的一个动点，则下列线段的长等于 $AP + EP$ 最小值的是 () .



A. AB

B. DE

C. BD

D. AF

【答案】 D

【解析】 方法一：根据正方形的性质得点 A 关于 BD 的对称点为 C 点，

$\therefore$ 连接 EC 交 BD 于点 P ，此时 $AP + EP$ 的值最小。

$\therefore AP + EP = EC$ 。

$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AD, BC 的中点，

$\therefore AB = CD = AD = BC, \angle ABF = \angle CDE = 90^\circ, DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC$

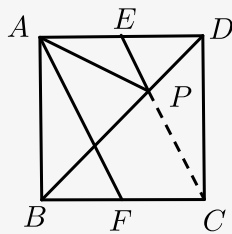
,

$\therefore DE = BF$ ，

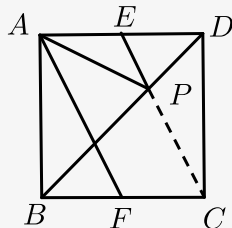
$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ ，

$\therefore CE = AF$ ，

$\therefore AP + EP$ 的最小值等于线段 AF 的长。



方法二：如图，连接 CP ，



由 $AD = CD, \angle ADP = \angle CDP = 45^\circ, DP = DP$ ，可得 $\triangle ADP \cong \triangle CDP$ ，

$\therefore AP = CP$ ，

$\therefore AP + PE = CP + PE$ ，

$\therefore$ 当点 E, P, C 在同一直线上时， $AP + PE$ 的最小值为 CE 的长，

$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别为 AD, BC 的中点，

$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle ABF = \angle CDE = 90^\circ, DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC,$
 $\therefore DE = BF,$
 $\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE,$
 $\therefore AF = CE,$
 $\therefore AP + EP$ 的最小值等于线段 AF 的长.
 故选：D.

【标注】【知识点】线段和的最小值

【重点强调】

2018年天津中考真题第11题3分

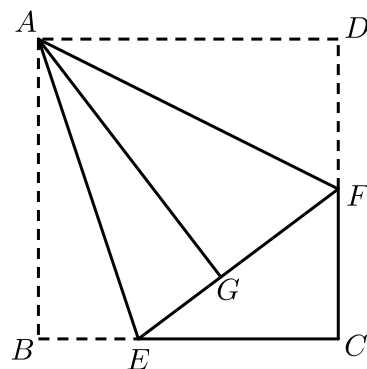
与翻折综合

典题精练

【重点强调】

2019年天津中考真题第17题3分

30. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为3，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，将 AB 、 AD 分别沿 AE 、 AF 折叠，点 B 、 D 恰好都落在点 G 处，已知 $BE = 1$ ，则 EF 的长为（ ）.



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{9}{4}$

D. 3

【答案】B

【解析】 $\because$ 正方形纸片 $ABCD$ 的边长为3，

$\therefore \angle C = 90^\circ, BC = CD = 3,$

根据折叠的性质得： $\angle AGE = \angle B = 90^\circ, \angle AGF = \angle D = 90^\circ,$

$EG = BE = 1, GF = DF,$

$\therefore \angle AGE + \angle AGF = 180^\circ.$

∴点 E 、 G 、 F 共线.

设 $DF = x$,

则 $EF = EG + GF = 1 + x$, $FC = DC - DF = 3 - x$,

$EC = BC - BE = 3 - 1 = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $EF^2 = EC^2 + FC^2$,

即 $(x+1)^2 = 2^2 + (3-x)^2$,

解得: $x = \frac{3}{2}$,

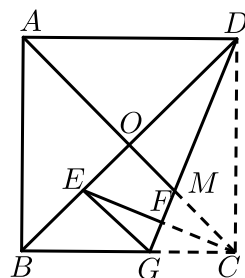
∴ $DF = \frac{3}{2}$, $EF = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

【重点强调】

2017年天津南开区初三一模第9题3分

31. 如图, 边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 将正方形 $ABCD$ 沿直线 DG 折叠, 点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处, 折痕 DG 交 AC 于点 M , 交 EC 于点 F , 则 OM 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AB = AD = BC = CD = \sqrt{2}$, $\angle DCB = \angle COD = \angle BOC = 90^\circ$, $OD = OC$,

∴ $BD = \sqrt{2}AB = 2$,

∴ $OD = BO = OC = 1$,

∴将正方形 $ABCD$ 沿直线 DF 折叠, 点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处,

∴ $DE = DC = \sqrt{2}$, $DF \perp CE$,

∴ $OE = \sqrt{2} - 1$, $\angle EDF + \angle FED = \angle ECO + \angle OEC = 90^\circ$,

∴ $\angle ODM = \angle ECO$,

在 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OMD$ 中,

$$\begin{cases} \angle EOC = \angle DOC = 90^\circ \\ OD = OC \\ \angle OCE = \angle ODM \end{cases},$$

$$\triangle OEC \cong \triangle OMD(\text{ASA}),$$

$$\therefore OM = OE = \sqrt{2} - 1.$$

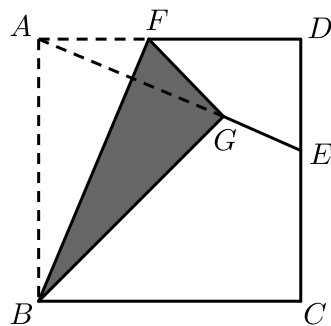
【标注】【知识点】正方形与全等综合

【重点强调】

2020年天津西青区初三二模第17题3分

🔔 经典再现

32. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为12， E 是边 CD 上一点，连接 AE ，折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的 G 点，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BF ，点 F 在 AD 上，若 $DE = 5$ ，则 GE 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{49}{13}$

【解析】 设 BF 与 AG 交于点 H ，

由折叠性质可知，

$$AG \perp BF,$$

$$\therefore \angle AHF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFH + \angle FAH = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DEA + \angle FAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFH = \angle DEA,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = CD,$$

$$\angle BAF = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA,$$

$$\therefore DE = 5,$$

$$\therefore AF = DE = 5,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore \angle AHF = \angle FAB = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
&\angle AFH = \angle AFB, \\
&\therefore \triangle AFH \sim \triangle BFA, \\
&\therefore \frac{AH}{BA} = \frac{AF}{BF}, \\
&\text{即 } \frac{AH}{12} = \frac{5}{13}, \\
&\therefore AH = \frac{60}{13}, \\
&\therefore AG = 2AH = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}, \\
&\therefore AD = 12, \\
&DE = 5, \\
&\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13, \\
&\therefore GE = AE - AG = 13 - \frac{120}{13} = \frac{49}{13}.
\end{aligned}$$

【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】相似三角形的性质

【知识点】翻折问题与勾股定理

【知识点】正方形的性质

【重点强调】

2019年天津中考真题第17题3分